# 莫斯科函数论学派的思想背景

蒋澈

北京大学哲学系

**摘要：** 莫斯科函数论学派活动于 20 世纪初期，在实变函数论和描述集合论中做了大量基础性工作。莫斯科函数论学派主要继续了德国集合论以及法国函数论的工作，同时深受布加耶夫等人关于非连续性的观点的影响，从东正教赞名派而来的宗教哲学思想也推动他们重视“可命名”的数学对象。这些思想背景为莫斯科数学家群体以命名和分类的方式来处理崭新而困难的数学对象创造了条件。

**关键词：** 莫斯科函数论学派，实变函数论史，描述集合论史，苏联数学史

## 4、导　言

苏俄数学在二十世纪的飞速发展，是现代数学史中值得关注的一个重要现象。从数学家师承谱系来看，苏联数学的源头首先是二十世纪初期莫斯科大学一批数学家群体。这批数学家在苏俄数学史上一般被称为莫斯科函数论学派（Московская школа теории функций，Moscow School of theory of functions）。一般认为［44, 281］，这一学派诞生标志是 1911 年德米特里·费奥多罗维奇·叶戈罗夫（Дмитрий Фёдорович Егоров，1869-1931）在巴黎科学院发表报告《论可测函数序列》，在这篇报告中，提出了著名的 Egorov 定理[①]，说明几乎处处收敛的可测函数列“大致上”是一致收敛的。。随后的 1912 年，尼古拉·尼古拉耶维奇·卢津（Николай Николаевич Лузин，1883-1950）[②]也得到了关于可测函数结构的 Luzin 定理，指明了几乎处处有限的可测函数“大致”与连续函数是相似的。这两个定理的结论已成为当代实变函数教科书中的经典。在接下来不到二十年的时间里，在以叶戈罗夫与卢津等人为核心的

① 本文在指称数学定理等的数学理论对象的名称时，根据现代中文数学文献的习惯，将人名用拉丁字母拼写，这是考虑到以某一数学家人名命名的定理、理论往往掺入了后人的归纳、修整或形式化，甚至有些是名实不符的。在涉及数学家本人的著述、活动时候，则用中文人名，希望以此做一种粗略的区分。

② 由于俄语到不同欧洲语言转写不同的缘故，卢津本人姓氏的拉丁字母有 Lusin、Luzin 两种拼写法，中文也有“卢津”、“鲁金”、“鲁辛”、“鲁津”等译名，本文统一使用“Luzin”和“卢津”。

学术团体“卢西塔尼亚”（Лузитания）[①]中，一大批数学家开始在函数论（特别是实变函数论）和集合论[②]方面开展了相当丰富的工作。一般所说的莫斯科函数论学派就是直接参与这一“卢西塔尼亚”群体的数学家［32, 29］。苏联数学的主要数学家，如安·尼·科尔莫戈罗夫（А.Н. Колмогоров，1903-1987）、帕·谢·亚历山大罗夫（П.С. Александров，1896-1982）、亚·雅·辛钦（А.Я. Хинчин，1894-1959）均出自这一学派。1923年，随着研究范围的扩大，“卢西塔尼亚”集体开始解体，许多年轻数学家开始进行独立的工作。在二十年代末和三十年代，苏联数学界经受了一系列的政治风暴，叶戈罗夫和卢津等人都受到了牵连[③]，莫斯科函数论学派的“黄金时代”就此结束。本文接受这种时间上的划界，将1911年至二十世纪三十年代作为莫斯科函数论学派活动的高峰时期，将其作为研究的范围。

## 5、传统数学编史学在研究实变函数论历史时的限度

传统的数学编史学在梳理史实取得了巨大的成就，这种编史学将数学史描绘为数学知识的积累和表述的不断优化，同时也倾向于用现代数学的理解来看到之前数学史中的“萌芽”。至于现代数学的历史，则往往是一马平川的师承相继，主要要做的只是数学成果的年表排序和说明哪些数学家取得了哪些新的数学成果。这样的编史方法在处理实变函数论的历史时，往往习惯于将实变函数论的历史描绘为昂利·勒贝格（Henri Lebesgue，1875-1941）建立Lebesgue积分理论的历史，是一场积分学的革命[④]。然而，这样的处理立刻会遇到来自现代数学本身的困难。即便按照当代数学的理解，“在数学分析中有个类似于先有蛋还是先有鸡的老问题：先有Lebesgue积分，还是先有Lebesgue测度？”[⑤] 新的积分理论，完全可以不经由测度理论，而是通过开拓Riemann积分所定义的泛函而建立，这种方法同勒贝格的处理方法历史几乎同样悠久[⑥]，但很少得到注意。此外，同微积分一样，Lebesgue积分理论并非是按照当代流行的实变函数教科书的顺序发展起来的，例如关于可测函数结构的Luzin定理即是发表于勒贝格给出Lebesgue积分的概念之后，这种时间上的错位如何理解，目前还

---

[①] 其名称来源的解释可见［23, 101-102］。
[②] 今天我们所习称的“集合论”往往等同于公理集合论，这一般被认为属于所谓“数学基础”的一部分，而实变函数论等则属于分析学的范畴，两者在学科上相距很远。但在叶戈罗夫等人的年代里，集合论对于一般函数论问题的研究是不可缺少的，同时在他们主要以描述集合论的观点来研究集合，这自然是同函数论的兴趣结合在一起的。换言之，集合论和函数论在莫斯科数学家那里是不可分割的，因此所谓的“莫斯科函数论学派”实际上做的不仅仅是（以当代数学观点看）狭义的函数论工作。
[③] 叶戈罗夫于1930年因牵涉某些宗教活动而被逮捕，卢津也于1936年遭到了政治上的压制，这即是所谓的“卢津案”（Дело Лузина）［12］。
[④] 如莫里斯·克莱因：《古今数学思想》，第四册，上海科学技术出版社，2002年，第118-132页。
[⑤] P. Lax, *Functional Analysis*, Wiley, 2002, p.529.
[⑥] 这即是所谓的Daniell方法，其阐述可见［3］。表述更加“现代”一些的Riesz-Kakutani定理也可以完成同样的处理。

很少得到说明。更重要的是，今天的函数论和勒贝格时代的函数论有着视域上的差别，今天的分析学家甚至很少知道那个时代函数论的一些经典成果①。这样的视域差异，注定会错失实变函数论发展的某些背景和重要方面。

此外，实变函数论的产生属于现代数学的一部分，其最重要的特征是其中诞生了许多新的概念、对象、方法乃至新的数学语言。新的概念之产生，需要一些思想前提，来保证数学家能够开始构造、研究这些新概念，舍此便不能将数学史处理为真正的思想史②。为了达到这一目的，首先需要这样一种预备性的工作：细致研究数学家创造新的数学对象时的动机，分析数学家进行数学工作时所持有的方法论的预设及其思想来源、思想背景。

### 6、本文的目的与研究意义

本文试图达到的目的即是：梳理莫斯科函数论学派的实变函数论工作的思想背景，指出莫斯科数学家群体数学工作方法论中某些要素的历史来源。

莫斯科函数论学派几乎是绝大部分苏联数学研究的滥觞，对二十世纪数学的影响是不可小觑的，对现代中国数学发展也有不小的影响③。研究这一学派起源的思想背景，有助于我们理解数学知识发现的逻辑，理解当代数学不同分支之间的关系。鉴于莫斯科数学家同宗教思想的密切联系，这段历史会是讨论宗教与科学关系的有用历史材料。此外，这也是一种从思想史向度理解现代数学史的尝试。

在莫斯科函数论学派历史的主题下，除去一些苏俄数学家所写的回忆与综述［**1; 26-30; 39; 42; 46**］，最值得指出的当代俄罗斯学者谢尔盖·谢尔盖耶维奇·杰米多夫（Сергей Сергеевич Демидов）发表了众多的历史文献与研究文章［**5-14**］，研究了这一学派的若干历史人物以及发展史背景，并且提供了研究数学家工作必要的史料（如通信、手稿等）。此外，著名的苏俄科学史专家洛伦·格雷厄姆（Loren Graham）和法国数学家让-米歇尔·康托尔（Jean-Michel Kantor）也发表了一系列文章和书籍［**20-23**］，对俄国数学家的生平、思想发展以及与法国数学界的相互影响作了一定阐述。本文将在他们的基础上梳理史实。

① 著名分析学家瓦尔特·鲁丁（Walter Rudin）曾经谈过这样一件事：他曾经随机挑选当代数学家，对他们提出这样一个问题：如果一个定义在平面上的实值函数$f$，固定$y$对$x$连续，固定$x$对$y$连续，那么$f$一定可测吗？分析学家的标准回答是含糊其辞，认为很难满足函数的可测性。只有一个人提到了这是一个 Baire 第 1 类函数［**45**, 741］。而 Baire 函数分类的理论是当时函数论最重要的部分之一，也对本文所论述的莫斯科数学家产生了极其重大的影响。

② 对于数学史中的辉格史倾向的详细分析以及数学史中的思想史进路介绍，可见［**47**］。

③ 例如，丁石孙先生早年的工作之一，就是翻译介绍卢津的经典著作《解析集合论讲义及其应用》，因为卢津"用这本书培养了一批苏联的数学家"。见丁石孙：《哭曾肯成》，http://blog.sina.com.cn/s/blog_504e3ddb0100mven.html，2012-11-1 访问。

# 7、莫斯科函数论学派的思想前史

## 8、十九世纪末的"莫斯科哲学数学学派"

叶戈罗夫、卢津等人的数学工作直接继承了十九世纪末的莫斯科数学传统。莫斯科的数学家群体的一个最重要特征是普遍具有十分浓重的保守和宗教倾向，这既有别于西欧的很多数学家，也有别于同处俄国的彼得堡数学家群体。彼得堡深受西欧的影响，流行着实证主义，热衷于解决物理学、力学和天文学中"实际问题"［5,115］，对尚处萌芽的现代数学并不感兴趣[①]，也反对对数学基础问题进行讨论［8, 285］。对当时刚刚诞生的康托的集合论，彼得堡数学家们的反应是："这不是数学，这是神学[②]。"［8, 287］后来的莫斯科函数论学派所着力处理的一般函数论问题在彼得堡数学家那里并没有什么重要性［5,115］。显然，这种当时看似"进步"的"反宗教"、"反神秘主义"倾向，却错失了十九世纪末、二十世纪初数学中最重大深远的变革，使彼得堡数学家群体不可能为现代数学研究做出开创性的贡献。

与彼得堡不同，十九世纪九十年代，莫斯科则形成了一个被称为"莫斯科哲学数学学派"（Московская философско-математическая школа）[③]的群体，塑造了莫斯科数学的哲学思辨传统。其学术领袖是数学家尼古拉·瓦西里耶维奇·布加耶夫（Николай Васильевич Бугаев，1837-1903）。布加耶夫同当时俄国宗教哲学家弗·谢·索洛维约夫（Вл. С. Соловьёв，1853-1900）、谢·尼·特鲁别茨科伊（С. Н. Трубецкой，1862-1905）、列·米·洛帕京（Л. М. Лопатин，1855-1920）等人多有交往［5,117］，深受他们的影响，其哲学观点从实证主义走向了唯心主义，也由此形成了一种独特的数学观。1897 年在瑞士苏黎世召开了第一届国际数学家大会（Erster Internationaler Mathematiker-Kongress），布加耶夫在会议用法语上做了题为《数学与科学哲学世界观》［2］的报告，集中阐述了他的数学哲学观点。其中，布加耶夫特别注意到了连续函数与非连续函数的问题。布加耶夫本人对非连续的函数的兴趣发轫于十九世纪六十年代［7,257］，早于勒贝格等人。布加耶夫将函数论视为纯数学工作中最重要的领域［7,257］，又将所研究的函数分为连续函数和非连续函数两类，由此，他提示应当有两类函数论——处理连续函数的一般"数学分析"（analyse mathématique），以及处理非连续函数的"数之学"

---

① 根据一些数学家的回忆，彼得堡的切比雪夫对黎曼几何和复分析这些新学科充满了鄙夷之意。见 С.П. 诺维科夫：《二十一世纪前夕的数学（I）——二十世纪下半叶的宗教：俄罗斯与西方物理-数学界的危机》，载《数学译林》，2005 年第 2 期，第 177-178 页。

② 康托本人的理论的确有某些神学背景，见［4, 294-297］。

③ 这一俄语短语也可理解为"莫斯科数学哲学学派"。1904 年，这一学派的参与者、数学家涅克拉索夫（П.А. Некрасов）为悼念布加耶夫，曾在莫斯科的《数学文集》（*Математический сборник*）杂志上发表了一篇两百多页的长文《莫斯科哲学数学学派及其奠基者》［43］，从中可以看到"莫斯科哲学数学学派"群体的自我定位。对这一群体当代评述可见俄国学者戈金（А.Е. Годин）的《莫斯科哲学数学学派思想的发展》一书［19］，这部著作更偏向于哲学史的阐述，涉及数学的部分略显薄弱。

（arithmologie）［2, 208］。所谓“数之学”是布加耶夫发明的名称，他试图达到的目的处理几类非连续函数［43, 29-31］。非连续函数之所以能进入布加耶夫的视野，并非由于将函数概念“一般化”的抽象兴趣或自然科学的需要，而是出于他的一种独特的形而上学观点，他称之为“演化单子论”（эволюционная монадология），其基本取向之一是反对绝对的决定论，认为连续的一一决定关系是不完全的。因此，他强调除了应研究现实的连续性之外，还十分有必要建立关于其对立面——非连续函数——的分析学。虽然他的尝试并不成功[①]，但是连续和非连续则成了莫斯科数学传统中最重要的数学对象之一。当法国数学家勒贝格、拜尔、博雷尔等人建立起新的实变函数论时，布加耶夫的学生敏锐地意识到，新的实变函数论实际上就是布加耶夫所希望建立的“数之学”［8, 286］。他们迅速研究并引入了新的函数论。

1902 年起，数学家姆洛济耶夫斯基（Б.К. Млодзеевский，1858-1925）第一次在莫斯科大学讲授了实变函数论，根据帕·谢·亚历山大洛夫的回忆，姆洛济耶夫斯基和叶戈罗夫[②]是相当反传统的［1, 12-14］。如果仅仅看各种讲义、论文的年表列举，他们的确是“新派”的，鲜明地有别于传统的、老派的分析学。在当代数学编史方法的影响下，很容易将此描述为“科学家的英雄故事”，解释为两种学说的对立，新锐的思想勇敢地冲击保守的旧思想。但是，这种反传统的动机如何解释？重提布加耶夫所提出的研究纲领可以帮助我们理解这一段思想史进程。姆洛济耶夫斯基和叶戈罗夫与其说是反传统的叛逆者，不如说是将布加耶夫传统继承下去的继承者，这种改变并非突如其来的革命，而是合乎逻辑的演进：莫斯科哲学数学学派感到缺乏一种真正的非连续函数分析学，姆洛济耶夫斯基等人将其填补。

**9、德法数学进展在俄国的回声**

纵览十九世纪和二十世纪初期的数学史，德国和法国的数学一直处于领先的地位。十九世纪，德国数学产生了两个极为重要的成果：分析的算术化和康托的集合论。前者可以认为是分析学中的范式变革，后者引发了激烈的数学讨论，也是现代数学哲学的滥觞。法国则有强大的分析学研究传统，在两个世纪之交，博雷尔（Émile Borel，1871-1956）、勒贝格、拜尔（René-Louis Baire，1874-1932）三人广泛地讨论了实函数、测度、积分等问题，为实变函数论奠定了基础。

德法数学对莫斯科数学家群体的影响是直接的。不仅是在二十世纪的头几年，姆洛济耶

[①] 根据数学家库兹涅佐夫（П.И. Кузнецов）的评论，布加耶夫试图建立“不连续分析”时，尝试将数论与无穷小分析相类比，但他的类比太过于流于表面，因此没有产生深刻的结果。见［28, 171-172］。
[②] 此时叶戈罗夫的主要工作领域还是变分法和微分方程。

夫斯基等人需要用法国的函数论工作来满足布加耶夫纲领的目标，而且直到二十世纪二十年代左右，法国函数论的专著还是莫斯科函数论学派的基本授课材料①。表面上看来，莫斯科的数学家是西欧数学的学生或模仿者，在德法数学规定的框架下工作。的确，莫斯科数学家的许多工作在形式上都是法国数学家的继续（如卢津的《解析集合论讲义及其应用》一书）。但这种理解无法解释为什么苏俄数学家的这些工作如此具有革命性，乃至开创了全新的解析集合论领域②。事实上，莫斯科函数论学派一开始便在宗教哲学的影响之下进行独特的研究，从精神气质到研究对象上，都与德法数学有着不同的选择。近年来的一些工作［21; 23］已经证明，研究法国、德国与俄国不同的数学文化是十分必要的，这是必须考察的思想史背景之一，可为我们勾勒或提示出莫斯科数学有别于西欧数学的决定性因素。

在对待德国的集合论时，法国和俄国数学家的分别可以立刻显现出来：

[……]**法国世俗的理性主义文化，妨碍数学家将无限集（特别是不可列的无限集）接受为合法的数学对象，然而莫斯科数学学派奠基者的神秘主义和宗教观点却对接受无限集产生了积极的影响。**［21, 58］

老一辈法国数学家埃尔米特（C. Hermite，1822-1901）颇有代表性地将康托的工作视为德国的形而上学，而非数学［21, 58］。至于新派数学家也不能十分彻底地接受康托理论。博雷尔一度曾着迷于康托的集合论，但是，随着研究工作的进展，他对康托理论越来越拒斥，甚至康托集合论严重危害了他的精神健康。拜尔也因涉及集合论的工作而神经衰弱，最终于1932年自杀［21, 60］。

与法国人形成鲜明对照的，是莫斯科数学家对集合论的接受。第一次将康托集合论介绍进俄语文献的人即是莫斯科函数论学派的一位重要数学家兼哲学家、神学家帕维尔·亚历山大罗维奇·弗洛连斯基（Павел Александрович Флоренский，1882-1937）。意味深长的是，这一引介工作首先不是在数学出版物中，而是在东正教的刊物《新路》（*Новый путь*）上面，题为《关于无穷的符号（论 G.康托的若干思想）》。在发表时弗洛连斯基还以赞许的口吻写道："他[康托]放弃了追求名誉和荣耀的机会，虽然无疑他十分期盼这些，但他仍拒绝花时间写这类成就名声的东西，离开了时髦的问题（复变函数或类似的问题）。"［38, 132］

① 柳思杰尔尼克（Л.А. Люстерник）回忆 1922 年接受卢津指导时，卢津为他推荐了若干书目，分析学方面几乎都是法国数学家写的教科书，实变函数论推荐的是博雷尔和勒贝格的专著。见［39, 212-213］。
② 解析集合论所研究的对象主要是解析集（analytic set），是 Borel 集的连续像，这是比 Borel 集合类更大的一个集合类，这是卢津讨论班中的苏斯林（М.Я. Суслин，1894-1919）发现的。投影集（projective sets）是对解析集进行取补、投影等运算的产物。

然而，对于魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass）、戴德金（R. Dedekind）等人将分析算术化的工作，俄国数学家则完全是另一种态度。二十世纪三十年代初期，卢津曾给数学家马·雅·维戈茨基（M.Я. Выгодский）写信谈分析学的一些基础性问题，曾经十分严厉地讲到他对魏尔斯特拉斯的工作的看法：

**我猜，您充满激情的语言是反对魏尔斯特拉斯——那位邪恶的天才——形式主义而斗争的语言（Denjoy[①]公开讲："魏尔斯特拉斯是数学中作恶的天才，绝不是数学的天才"）。[13, 81]**

此时，他与法国的博雷尔站在一起反对魏尔斯特拉斯的形式主义数学观。魏尔斯特拉斯式的分析学今天已经成为正统的理论，在当代的数学专业学生看来，这几乎是分析学的唯一形态，然而，同为现代数学重要代表的卢津却几乎与之斗争了一生。这种态度引导卢津等人回到对函数本质的思考上来。卢津为《苏联大百科全书》写的词条《函数》表明，在世纪之交，许多杰出的数学家都感到，狄利克雷的函数定义太过宽泛，而魏尔斯特拉斯对解析函数的定义又太过严格［37, 263］。在研究这一问题时，拜尔的函数分类理论为莫斯科函数论学派提供了一个很好的演习场，与描述集合论的结合更加扩宽了函数论研究的视野。

上述德法数学成就引起的问题可以看作是莫斯科函数论学派工作的必要背景或条件，然而，在这些问题上能够迈出关键的一步，所面对的不仅仅有数学上的困难，还有哲学上的困难：认识或构造一些新的特殊数学对象（如投影集）何以可能？这些特殊数学对象的存在性难题，绝非认识古典数学的对象的困难。为克服这种哲学上的实质性困难，需要一种助力，而这种助力是与莫斯科函数论学派所特有的宗教哲学观点密切相关的。

## 10、宗教哲学对莫斯科函数论学派的影响

莫斯科函数论学派数学家对自己的数学工作出自一种形而上学基础这一点，有着充分的自我意识，对此也不加掩蔽。勒贝格在为卢津《解析集合论及其应用》所作的序言[②]中就已经明确提到："卢津先生考察问题从哲学观点始，又以数学结果终。这是尚无前例的创举！"［34, ix］ 如果不了解这一哲学出发点，也就很难理解卢津等人工作的动机和遇到的困难。

---

① 阿诺·当茹瓦（Arnaud Denjoy）是法国数学家，也是卢津的好友［23, 207］。

② 卢津的这部著作首先是用法语出版的，后来翻译成俄语，这中间"按照卢津的指示，俄译本按照了法文本作了一些精简"［33, xii］。在精简下，这篇序言一开始并没有译成俄文，因此根据俄文版翻译的中译本也没有这篇勒贝格所做的序言。同样，书中很多谈论哲学问题的部分也被删减掉了。

### 11、弗洛连斯基的宗教哲学及其对卢津等人的影响

弗洛连斯基是一位富有个性的人物，其兴趣跨越多个领域，常被称为“俄国的达芬奇”。他毕业于莫斯科大学物理-数学系（физико-математический факультет），同叶戈罗夫、鲁津有密切的来往。数学哲学观点上，弗洛连斯基可以说是布加耶夫思想的继续［19, 95-99］，非连续性对他而言也具有世界观的意义［15］。

弗洛连斯基对卢津等人最大的影响在于宗教哲学方面。信仰上上弗洛连斯基属于赞名派（Имяславие）。这一教派的教义十分独特，被沙俄时代的东正教会视为异端。赞名派遇到的一个核心问题是：人何以能崇拜一个他们无从知道的神？一些俄国僧侣将这个问题归结为上帝的名谓——“上帝的名就是上帝本身”（Имя Бога есть Сам Бог）。因此人们只需也只能礼赞上帝的名称，而非上帝本身。这一教派在民间的初期实践中，看似充满了蒙昧的风格：有节律地呼喊上帝的名，然后进入一种迷狂状态。然而，在俄国知识分子中，却引发了十分复杂深邃的形而上学思想①，弗洛连斯基就是其中的代表。赞名派宗教哲学思想与莫斯科函数论学派数学工作的联系就在于现代数学某些部门和宗教在认识对象上的相似：“数学家和宗教信徒都试图把捉那些看似不可表达、不可言喻的、乃至不可理解的对象”［22, 18］。在这个意义上，弗洛连斯基的哲学观点是莫斯科数学家开辟新领域的工作之所以可能的先验前提。

具体来说，弗洛连斯基理解到，赞名派已经将“命名”的问题提到了一个新的高度。对某物命名就是诞生了一个新的实体。数学正是这种自由创造活动，因而具有宗教意义。数学家仅仅通过命名就可以创造某种存在。此外，分类也有巨大的意义。在弗洛连斯基看来，集合论所证明的，正是命名和分类能够在数学中起到巨大的作用，这种数学对象的诞生可以拯救人类离开十九世纪盛行的唯物主义的、决定论的分析。此外，集合论为连续和非连续问题创造了新的视域，这又正是在布加耶夫极力强调的问题［21, 70］。由此，我们可以理解弗洛连斯基等莫斯科数学家在面对集合论时的狂喜。

弗洛连斯基与叶戈罗夫、卢津等人长期保持着通信。从现今保留下来的书信和传记材料来看，我们可以较为清晰地看到莫斯科函数论学派缔造者之一的卢津的思想演进。

卢津学习数学一开始只是为了做工程师，后来受到布加耶夫和叶戈罗夫的影响，开始钻

① 著名哲学家布尔加科夫（С.Н.Булгаков）和洛谢夫（А.Ф. Лосев）都写过题为《名谓哲学》（*Философия имени*）的著作。洛谢夫和叶戈罗夫、卢津等人有密切的私人关系，他的思想也深受赞名派的影响。

研纯数学。1905 年革命的爆发和失败使思想激进的卢津消沉，叶戈罗夫将他送到巴黎留学［23, 78-82］。但是，卢津仍然在经受精神危机，1906 年 5 月 1 日，他在给弗洛连斯基的信中写道："我至今所了解的世界观（唯物主义世界观）已经绝对不能让我满足了"［38, 136］经过与弗洛连斯基的数封通信，卢津 1908 年的信件中已经饱含宗教感情。甚至还与弗洛连斯基以半数学半神学的方式讨论"三这个数"——为什么上帝是三位一体，而不是二或四？［38, 149-150］弗洛连斯基使卢津熟悉了由赞名派而来的宗教哲学思想，这种思想使卢津等人在处理数学对象定义问题时能够另辟蹊径。

**12、命名与分类：描述集合论和描述函数论的基本方法**

集合论的研究立刻产生了关于数学对象定义的问题。"康托的天堂"（希尔伯特语）太过抽象，缺少必要的限定，描述集合论的基本取向就是采取一种同康托不同的路径①。这种限定应当如何落实？首先需要提出数学实体的本性为何的问题。莫斯科函数论学派的数学家认为，如果一个数学对象之有效是可怀疑的，那么对这些对象做的论断、由此发展出来的理论也必定的可疑的［46, 88］。卢津提出，"数学分析的现代状况决定性地证明了，在被看做存在着的数学实体和其他数学实体——它的实在性只是表面上的（apparente）——间划开一条精确的界限，这是何等重要。"［34, 17］ 这里所谈的仅仅"表面上实在的"数学对象，指的是仅由逻辑上不矛盾而得到的数学对象。

类似的问题，法国数学家也有触及。对于集合论引起的理论问题，阿达玛（J. Hadamard，1865-1963）、勒贝格、博雷尔和拜尔四人曾经有过著名的《论集合论的五封书信》（Cinq lettres sur la théorie des ensembles）。在其中的第三封信中，勒贝格向博雷尔提出这样一个问题："不用定义，你是否可以证明一个数学存在物的存在？"［25, 265］什么是"定义"呢？"**定义**这个词总是意味着：**对被定义的特征属性进行命名**。"［25, 266］这里，"命名"一词是值得重视的。勒贝格在涉及某些尚不知道的数学对象时，曾经多次使用"被命名"（nommé）的概念。比如，在 1904 年，他曾经在《积分与寻找原函数讲义》（*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*）中写道："我不知道是否可以命名一个并非 B 可测的函数；我不知道是否不可测函数存在。"［23, 49］在集合论中，他也有"被命名集"（ensemble nommé）的术语［23, 58］。

① 描述集合论同公理集合论一大不同即是：描述集合论主要将其理论对象限定在实数集合和实函数上。而公理集合论则排除这种限制，讨论的是一般的集合。

法国数学家这样提出问题和使用术语，深深激发了隶属于赞名派、或深受赞名派影响的莫斯科数学家的宗教思想。在这里，问题几乎与东正教赞名派所涉及的神学问题“人何以崇拜一个人不知道的上帝”如出一辙，具有同样的结构。命名和名谓的特殊意义实际上是使莫斯科函数论学派将视域投向描述集合论和描述函数论[①]得以可能的条件之一，也因此使得莫斯科数学家能够比法国数学家走得更远。

命名以及随之而来的分类问题也成了卢津工作的核心问题之一。卢津在自己的手稿中写下了这样一段有方法论意义的话：

**如果能有“命名”（nommer）的定义，那将是十分令人满意的，但这在目前看来是不可能的。我提出：**

**命名就是拥有个体性（Nommer c'est avoir individu）。这看起来是个自然的定义，因为个体的概念是十分原始的概念。这样，便不需要更多的定义。但是当考察例子时，困难就会出现。[ 23, 207 ]**

这句话的含义是明白的，命名将使个体对象成为数学家所能意向、能把握的对象，这也正是卢津数学工作的特色。在工作中，卢津首先便循着勒贝格的思路，区分“可命名的集合”（les emsembles nommable）和“不可命名的集合”（ensemble non nommable）[34, 20-21]。卢津本人明确将此作为他进行研究的纲领（programme）[34, 23]。这种对研究范围的限定实际上是对已有研究范围的扩展，因为这可以允许卢津等人去追寻一切可以命名的、但原先尚未得到考察的数学对象。

一个例子可以说明这一点：法国数学家提出了 B 可测集的概念[②]。但是，“如果接受所有的 B 可测集合，那么就必然要接受投影集合”，而投影集合则是一个难以描述的概念——“一个定义是不可能完全合法化的对象：它是一个纯粹反面的概念，不可能有任何形式的正面的定义”[35, 260]。这样看似难以理解的集合，难以用逻辑有效地考察，然而借助于“命名就是拥有个体性”，卢津等人在其他数学家望而却步的地方继续前进。

事实上，描述集合论的一个最主要目标就是描述一切“自然出现的”实数集合，研究其结构，具体的方法主要是构造各种集合的等级（从最简单的、从实数开区间组成的集合开始）

---

① 习称为“描述集合论”的理论，完整的称呼应该是“描述集合论和描述函数论”。卢津自己就称呼这一理论为“描述函数论”，在他的著作中，从未出现“描述集合论”这一术语［46, 85］。他的弟子梅尼绍夫（Д.Н. Меньшов）和拉夫连季耶夫（М.А. Лаврентьев）也使用过“描述实变函数论”的说法［42, 33-39］。

② 简略地讲，B 可测集合就是从区间出发，对可数多个集合做可数多次并和交所能得到的集合。

［21, 72］。对待函数也是同样的处理，莫斯科函数论学派的兴趣点之一便是集合与函数的分类［24, 867］。

正如卢津手稿的研究者罗吉尔·库克（Roger Cooke）所说：

**他[卢津]频繁地研究了“可命名”对象的概念，并且研究了这种对象与他试图在 Baire 分类中要完成的分析学的植物志和动物志目录的关系[……]卢津十分努力地试图命名一切可数基数。**［22, 21］

这种关切同样受到莫斯科哲学数学学派的影响。早在布加耶夫时代，莫斯科数学家群体在关于连续和非连续的问题上，对函数分类问题就极为感兴趣。姆洛济耶夫斯基在他的函数论讲义中写道：“最重要的问题是对函数分类。就此殊可注意的是布加耶夫教授的函数分类。”［41, 139］姆洛济耶夫斯基本人根据布加耶夫的分类法，将一切实变函数分为三类：定义在不形成区间的实数集上的函数（布加耶夫称之为“纯函数”）、定义在一整段区间上的非连续函数（布加耶夫称之为“半解析函数”或“半连续函数”）以及定义在一整段区间上的连续函数［42, 139-140］。这一分类应当说是很是初等的。卢津等人则是在 Baire 函数分类①的基础上进行工作。在具体的工作中，卢津等人一再回到关于命名（定义）的难题上来。勒贝格证明了，每一类 Baire 函数都是不空的，但同时也有不属于任何一个 Baire 函数类的函数存在。卢津敏锐地察觉到：“勒贝格的结果表明，对一个特定函数的**逻辑**定义比纯数学定义更加宽泛，因为**逻辑定义产出的一个特定的函数** *f(x)* **不能通过多项式的有限的或可数次取极限而得到**”［37, 266］。Baire 分类的这种不完善性使卢津等人开始了对现成的函数分类的批判性分析，莫斯科函数论学派举出了大量的反例来探索函数定义及分类的问题，他们进入的领域在同时代人或许看来都是数学世界的幽暗之地，这其中不可缺少的一个动力就是对“定义”或“命名”的严肃追求。

# 13、结语

从上面的讨论，我们可以看到，莫斯科函数论学派的起源有值得注意的思想史背景。这

① Baire 函数分类思想大致脉络是：首先从连续函数作为最基本的对象，通过极限运算获得更广的函数类，对此的更详细说明可见［33, 355-366］。

其中重要的要素可以列举如下：

1⁰ 莫斯科哲学数学学派将数学中的非连续强调为世界观的要素，以及布加耶夫等人的宗教兴趣，这些特征一直保留在叶戈罗夫、卢津等人的工作之中；

2⁰ 弗洛连斯基等人的赞名派思想及其形而上学推论，这引导莫斯科数学家对难以把捉的数学对象以命名和分类的方式来处理；

3⁰ 德国数学家在集合论、分析学方面工作以及法国勒贝格、博雷尔、拜尔等人的函数论工作，莫斯科数学家并非简单地继承或继续他们的工作，而是将他们的工作成果在自己的视域之内加以克服和改造。

这三方面的思想共同构成了莫斯科函数论学派数学工作的思想背景，其中从赞名派而来的宗教哲学思想是其中最为重要的塑造性因素。

二十世纪初期的函数论是诸多思想和概念的交汇点，许多从事这一领域的数学家都曾十分自觉地考察数学哲学乃至一般哲学问题，在这里，数学基础与更高阶的数学理论的关联也是明显的。可以预见，对此的思想史考察还会呈现出更加丰富的多样性。

## 参考文献

[1] Александров П.С. Математика в Московском университете в XX в.[J] *Историко-математические исследования*, 1955, 8: 9-54.

[2] Bougaiev N. Les mathgmatiques et la conception du monde au point de rue de la philosophie scienfifique [A]. In: Rudio F. (ed.) *Verhandlungen des ersten Internationalen Mathematiker- Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897* [C], Leipzig: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1898, 206-223.

[3] Daniell, P.J. A General Form of Integral. *Annals of Mathematics*, Second Series, 1918, 19(4): 279–294.

[4] Dauben J.W. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite* [M]. Princeton: Princeton University Press, 1990.

[5] Демидов С.С. Н. В. Бугаев и возникновение Московской школы теории функций действительного переменного [J]. *Историко-математические исследования*, 1985, 29: 113-124.

[6] Демидов С.С. Из ранней истории Московской школы теории функций [J]. *Историко-математические исследования*, 1986, 30: 124-129.

[7] Демидов С.С. Философские предпосылки возникновения Московской школы теории функций [A]. Гайденко П.П. (Ред.) *Традиции и револююции в истории науки* [C]. М.:Наука, 1991, 253-262.

[8] Demidov S.S. Where is the Meeting Place of Philosophical Influence on Mathematics? An Exemple Taken from the History of Mathematics in Russia [A]. In: Ausejo E., Hormigon M. (eds.) *Paradigms and Mathematics* [C]. Zaragoza: Siglo XXI de España Editores, S.A., 1996, 283-288.

[9] Демидов С.С. Профессор Московского университета Дмитрий Федорович Егоров и имеславие в России в первой трети XX столетия [J]. *Историко-математические исследования*, 1999, 39: 123-155.

[10] Demidov S.S. The Moscow School of the Theory of Functions in the 1930s [A]. In: Zdravkovska S., Duren P.

(eds.) *Golden Years of Moscow Mathematics* [C], American Mathematical Society & London Mathematical Society, 2003, 35-53.

[11] Demidov S.S., Ford C.E. On the road to a unified world view: Priest Pavel Florensky — theologian, philosopher and scientist [A]. In: Koetsier T., Bergmans L. (eds.) *Mathematics and the Divine: A Historical Study* [C], Elsevier, 2005, 592-612.

[12] Демидов С.С., Левшин Б.В. (ред.) *Дело академика Николая Николаевича Лузина* [C]. СПб.: РХГИ, 1999.

[13] Демидов С.С., Паршин А.Н., Половинкин С.М. О переписке Н.Н.Лузина с П.А.Флоренским [J]. *Историко-математические исследования*, 1989, 31: 116-125.

[14] Demidov S.S., Shenitzer A. Two Letters by N.N. Luzin to M. Ya. Vygodskii [J]. *The American Mathematical Monthly*, 2000, 107(1): 64-82.

[15] Флоренский П.А. Введение к диссертации Идея прерывности как элемент миросозерцания. (Публикация и примечания С.С.Демидова и А.Н.Паршина) [J]. *Историко-математические исследования*, 1986, 30: 159-177.

[16] Ford C.E. Dmitrii Egorov: Mathematics and Religion in Moscow [J]. *The Mathematical Intelligencer*, 1991, 13(2): 24-30.

[17] Ford C.E. N.N. Luzin as Seen through His Correspondence with P.A. Florensky [J]. *Modern Logic*, 1997, 7(3/4): 233-255.

[18] Ford C.E. The Influence of P.A. Florensky on N.N. Luzin [J]. *Historia Mathematica*, 1998, 25(3): 332-339.

[19] Годин А.Е. *Развитие идей Московской философско-математической школы*. (Издание второе, расширенное) [M]. M.: Красный свет, 2006.

[20] Graham L., Kantor J.-M. Russian Religious Mystics and French Rationalists: Mathematics, 1900-1930 [J]. *Bulletin of the American Academy of Arts and Sciences*, 2005, 58(3): 12-19.

[21] Graham L., Kantor J.-M. A Comparison of Two Cultural Approaches to Mathematics: France and Russia, 1890–1930 [J]. *Isis*, 2006, 97(1): 56-74.

[22] Graham L., Kantor J.-M. Religious Heresy and Mathematical Creativity in Russia [J]. *The Mathematical Intelligencer*, 2007, 29(4): 17-22.

[23] Graham L., Kantor J.-M. Naming Infinity: A True Story of Religious Mysticism and Mathematical Creativity [M]. Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press, 2009.

[24] Gray J. Weierstrass, Luzin and Intuition [J]. *The American Mathematical Monthly*, 2001, 108(9): 865-870.

[25] Hadamard J. *et al.* Cinq lettres sur la théorie des ensembles [J]. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1905, 33: 261-273.

[26] Келдыш Л.В. Идеи Н. Н. Лузина в дескриптивной теории множеств [J]. *Успехи математических наук*, 1974, 29(5): 183-196.

[27] Келдыш Л.В., Новиков П.С. Работы Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств [J]. *Успехи математических наук*, 1953, 8(2): 93-104.

[28] Кузнецов П.И. Дмитрий Федорович Егоров (к 100-летию со дня рождения) [J]. *Успехи математических наук*, 1971, 26(5): 169-206.

[29] Кузнецов П.И. Николай Николаевич Лузин (к девяностолетию со дня рождения) [J]. *Успехи математических наук*, 1974, 29(5): 197-210.

[30] Лаврентьев М.А. Николай Николаевич Лузин [J]. *Успехи математических наук*, 1974, 29(5): 177-182.

[31] Лебег А. Предисловие к книге Н. Н. Лузина “Лекции об аналитических множествах и их приложениях” [J]. *Успехи математических наук*, 1985, 40(3): 9-14.

[32] 李文林. 莫斯科函数论学派[A]. 载：吴文俊主编，中国数学史论文集（三）[C]，山东教育出版社，1987.

[33] 鲁金 H.H. 实变函数论[M]. 北京：高等教育出版社，1954.

[34] Lusin N. *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications* [M]. Paris: Gauthier-Villars et C$^{ie}$, Éditeurs, 1930.

[35] 鲁辛 H.H. 解析集合论讲义及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1958.

[36] Luzin N.N. Function: Part I [J]. *The American Mathematical Monthly*, 1998, 105(1): 59-67.

[37] Luzin N.N. Function: Part II [J]. *The American Mathematical Monthly*, 1998, 105(3): 263-270.

[38] Лузин Н.Н., Флоренский П.А. Переписка Н.Н. Лузина и П.А. Флоренского [J]. *Историко-математические исследования*, 1989, 31: 125-191

[39] Люстерник Л.А. Молодость Московской математической школы [часть II] [J]. *Успехи математических наук*, 1967, 22(2): 199-239.

[40] Марков А.А.等. 三十年来的苏联数学：拓扑学、描述集合论[M]. 北京: 科学出版社, 1955.

[41] Медведев Ф.А. О курсе лекций Б.К.Млодзеевского по теории функций действительного переменного, прочитанный осенью 1902 г. в Московском университете [J]. *Историко-математические исследования*, 1986, 30: 130-148.

[42] Меньшов Д.Н., Лаврентьев М.А. Успехи теории функций действительного переменного в СССР [J]. *Математический сборник*, 1928, 35(дополнит. вып.): 21-39.

[43] Некрасов П.А. Московская философско-математическая школа и ея основатели [J]. *Математический сборник*, 1904, 25(1), 3-249.

[44] Phillips E.R. Nicolai Nicolaevich Luzin and the MoscowSchool of the Theory of Functions [J]. *Historia Mathematica*, 1978, 5(3): 275-305.

[45] Rudin W. Lebesgue's First Theorem [A]. In: Nachbin L.(ed.) *Mathematical Analysis and Applications*, Part B, Academic Press, 1981, 741-747.

[46] Успенский В.А. Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций понятия, проблемы, предсказания. [J]. *Успехи математических наук*, 1985, 40(3): 85-116.

[47] 张东林. 数学史：从辉格史到思想史 [J]. 科学文化评论, 2011, 8(6): 26-41.

# The Intellectual Background of Moscow School of Theory of Functions

Jiang Che

Department of Philosophy, Peking University

**Abstract:** Moscow School of theory of functions (MSTF) made great contributions to theory of function of a real variable and descriptive set theory in early 20th century. Deeply influenced by Bugaev's ideas on noncontinuity and inspired by the religious-philosophical thoughts from *Imiaslavie*, MSTF proceeded with the work of German set theory and French function theory, focused on the "nameable" mathematical entities. This intellectual background created conditions for MSTF to deal with the novel and difficult mathematical objects by means of naming and classifying.

**Keywords:** Moscow School of Theory of Functions, History of Theory of Functions of a Real Variable, History of Descriptive Set Theory, History of Soviet Mathematics

作者简介：蒋澈，男，北京大学哲学系科学技术史专业博士（直博）研究生一年级，研究方向为科学思想史。Email：jiangche@163.com

万方数据 WANFANG DATA 文献链接

# 莫斯科函数论学派的思想背景

作者：　　　　　　　　　蒋澈
作者单位：　　　　　　　北京大学哲学系

引用本文格式：蒋澈 莫斯科函数论学派的思想背景[会议论文] 2012